

Toán học Tài chính, một ngành khoa học đang phát triển mạnh

Trần Hùng Thao (Viện Toán học)

Toán học tài chính ra đời hơn 100 năm nay, nhưng đặc biệt phát triển trong khoảng ba bốn thập kỷ nay và ngày càng tỏ ra hữu ích trong thực tiễn đời sống kinh tế của các quốc gia và các cộng đồng kinh tế trên thế giới. Nó gắn liền với việc phân tích một cách khoa học những sự kiện tăng trưởng, rủi ro, lạm phát, khủng hoảng tài chính, bảo hiểm, . . . , vốn là những vấn đề tài chính thời sự, nhất là trong cơn suy thoái kinh tế toàn cầu hiện nay.

I. Vài nét lịch sử. Ngày 29 tháng Ba năm 1900 đã được thừa nhận là ngày khai sinh ra Toán học tài chính, ngày mà Louis Bachelier (1870-1946) bảo vệ thành công luận án tiến sĩ nhan đề “Lý thuyết đầu cơ tài chính” (Théorie de spéculation) tại Đại học Sorbonne (Paris) dưới sự hướng dẫn của nhà toán học lừng danh là Henri Poincaré. Bachelier là người đầu tiên đã khám phá ra chuyển động Brown dưới dạng toán học (trước cả A. Einstein tới 5 năm) và dùng chuyển động này để mô tả diễn biến của giá chứng khoán. Năm 2000, giới toán học tài chính thế giới đã tổ chức lễ kỷ niệm 100 năm ra đời của ngành này tại Paris.

Tuy nhiên, mãi đến hơn nửa thế kỷ sau, công trình của Bachelier mới được biết đến rộng rãi trong những người nghiên cứu tài chính; bản dịch tiếng Anh của công trình này chỉ xuất hiện vào năm 1967, khi mà những ứng dụng của toán học vào nghiên cứu tài chính đã dần trở nên cấp thiết.

Vào khoảng năm 1953 và sau đó, Harry Markowitz và James Tobin đã đưa ra lý thuyết “lựa chọn danh mục đầu tư”, dựa vào việc phân tích trung bình-phương sai trong lý thuyết xác suất.

Nhưng một mốc quan trọng là sự ra đời của mô hình Black-Scholes vào năm 1973, sự kiện đó có tính chất cách mạng vì nó làm thay đổi đồng loạt phương thức tính toán vốn đầu tư vào các thị trường chứng khoán, đặc biệt là thị trường các quyền chọn (options). Lịch sử mô hình Black-Scholes là như sau: Năm 1973, Fischer Black, một chàng trai 31 tuổi và là một chuyên gia tạo dựng các hợp đồng tài chính, cùng với một chàng trai khác 28 tuổi là Myron Scholes, một trợ giáo về khoa học tài chính tại Đại học MIT ở Massachusetts (Mỹ) và là một tiến sĩ toán học ứng dụng, đã cùng viết một bài báo phân tích về giá trị của quyền chọn mua kiểu châu Âu, tên là “Định giá các quyền chọn và các khoản nợ”. Bài báo này khi đó được gửi đăng tại Tạp chí Kinh tế Chính trị và Tạp chí Kinh tế và Thống kê của Mỹ nhưng đều bị cả hai tạp chí đó từ chối. Sau đó, với sự hiệu đính của hai nhà nghiên cứu toán kinh tế là Merton Miller (Đại học Chicago, giải thưởng Nobel) và Eugene Fama (Đại học Chicago), cha đẻ của lý thuyết thị trường hiệu quả, cuối cùng bài báo đã được đăng trên Tạp chí Kinh tế Chính trị, và tới năm 1975, công thức Black-Scholes đã được chấp nhận là công cụ tính toán trên các thị trường chứng khoán Mỹ và châu Âu.

Sau đó, nhận thấy mô hình Black-Scholes còn nhiều khiếm khuyết trong sự phản ánh thực tế thị trường tài chính, nhiều nhà nghiên cứu toán tài chính đã vào cuộc, sáng tạo ra nhiều lý thuyết phong phú và có tính ứng dụng cao, trong đó phải kể đến nhiều nhà toán học tầm cỡ như S. Shreve, T. Bjork, A. Shiryaev, D. Nualart, G. Kallianpur, N. Karoui, M. Rutkowski và rất nhiều tác giả nổi tiếng khác mà đa phần trong số họ là

những chuyên gia giỏi về xác suất thống kê và giải tích ngẫu nhiên.

Ở Việt Nam, Viện Toán học đã cử cán bộ đi học tập và nghiên cứu về Toán tài chính ở nước ngoài từ năm 1991 và một nhóm nghiên cứu chung ở trình độ cao đã hình thành tại Viện Toán học và Khoa Toán-Cơ-Tin học ĐHKHTN Hà nội trong khoảng 10 năm trở lại đây. Một số Tiến sĩ và Thạc sĩ về toán tài chính đã được đào tạo tại hai cơ quan này trong những năm qua.

Tại Đại học Kinh tế Quốc dân Hà nội, có hẳn một Bộ môn Toán tài chính đã đào tạo được nhiều sinh viên chuyên ngành toán tài chính. Hiện nay, Khoa Toán Kinh tế ĐH Kinh tế quốc dân Hà nội đang phối hợp với Đại học Lyon 1 (Pháp) đào tạo các khóa Cao học về “Định phí bảo hiểm và toán tài chính”, Sinh viên được học cả ở Hà nội và ở Lyon. Việc nghiên cứu và giảng dạy Toán tài chính cũng được triển khai tại Đại học Bách Khoa Hà nội, Đại học Kinh tế Quốc dân thành phố Hồ Chí Minh, Đại học KHTN thành phố Hồ Chí Minh và một số Đại học khác. Ngoài ra, cán bộ Viện Toán học cũng tham gia hướng dẫn và đào tạo nhiều tiến sĩ và thạc sĩ về toán tài chính ở nước ngoài.

II. Các công cụ toán học của Toán học tài chính. Các công cụ này bao gồm nhiều bộ môn toán học như Xác suất và Thống kê, Giải tích ngẫu nhiên, Lý thuyết trò chơi, Lý thuyết tối ưu, Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng, Lý thuyết điều khiển,... Nhưng đóng vai trò chủ đạo là các phương pháp của xác suất, thống kê và giải tích ngẫu nhiên. Điều đó dễ hiểu, vì diễn biến của giá các sản phẩm tài chính là ngẫu nhiên, nó đòi hỏi phải được xử lý bằng các phương pháp đó. Điều ấy cũng rất nghĩa tại sao những nhà nghiên cứu toán học tài chính đã giới thiệu trên đều là những chuyên gia uyên bác về Giải tích ngẫu nhiên và Xác suất Thống kê.

Ở nhiều đại học nước ta, bắt đầu có sự quan tâm xây dựng chương trình môn học để đào

tạo và nghiên cứu về Toán tài chính. Chúng tôi nghĩ rằng, việc này phải được tiến hành một cách nghiêm túc và *không nên xa rời các chuẩn mực quốc tế*. Toán học tài chính là gì, cần phải dạy những môn gì từ cơ sở đến nâng cao, câu hỏi này đã có những trả lời chung trên thế giới từ lâu. Không phải bất cứ thủ thuật nào dùng đến vài kiến thức toán sơ cấp và vài phần mềm giả định nào đó để dự đoán một biến động giá nào đó, đã làm nên môn học Toán tài chính, hoặc đã có thể coi là một nghiên cứu khoa học nghiêm túc được. Hệ thống tài chính là một hệ phức tạp, do đó công cụ toán học để xử lý nó không thể là một công cụ thô sơ được.

III. Vài khái niệm. Không thể mô tả bằng vài dòng các nội dung phong phú của Toán học tài chính. Tuy nhiên, cũng có thể nêu lên một cách sơ lược và *heuristic* vài khái niệm cơ bản:

1. *Tài sản tài chính* gồm hai loại, đó là tài sản cơ bản (gồm các cổ phiếu, trái phiếu, giấy ghi nợ, tài khoản ngân hàng,...) và tài sản phái sinh (gồm các hợp đồng tài chính tạo nên từ các tài sản cơ bản theo một số điều kiện nào đó, có giá trị biến đổi ngẫu nhiên theo thời gian và có thời điểm đáo hạn và giá trị đáo hạn định trước). Tài sản cơ bản ví như các vật liệu xây dựng (gạch, xi măng, sắt thép,...); tài sản phái sinh tựa như các ngôi nhà tạo nên từ các vật liệu đó. Tài sản phái sinh chính là các hợp đồng tài chính xây dựng trên các chứng khoán cơ bản với các điều khoản ràng buộc nào đó. Trong thị trường tài chính, người ta buôn bán các giấy tờ có mệnh giá, tức là các hợp đồng tài chính.

2. *Độ chênh thị giá* (Arbitrage): Một phương án đầu tư gọi là có cơ hội chênh thị giá, nếu tại thời điểm ban đầu giá trị của phương án đầu tư bằng 0 nhưng tại thời điểm đáo hạn, giá trị của phương án ấy là không âm và có khả năng dương thực sự. Trong một thị trường có độ chênh thị giá, một nhà đầu tư tay không vẫn có thể kiếm lời.

Người ta luôn mong muốn không có điều đó xảy ra, tức là được làm việc trong thị trường không có cơ hội chênh thị giá.

3. *Thị trường đầy đủ* là thị trường mà với một giá đáo hạn nào định trước nào đây của các hợp đồng tài chính, thế nào cũng tồn tại một phương án đầu tư tự tài trợ mà giá trị cuối cùng của nó đạt được giá trị đáo hạn định trước ấy. Ở đây, phương án đầu tư tự tài trợ được hiểu nôm na là phương án đầu tư mà trong thời hạn của hợp đồng có thể thay đổi tỉ trọng tiền đầu tư vào mỗi chứng khoán, nhưng tổng số tiền đầu tư vẫn không thay đổi.

4. *Thị trường lành mạnh* là thị trường trong đó không tồn tại cơ hội có độ chênh thị giá.

5. *Thị trường hiệu quả* là thị trường thỏa mãn hai giả thiết:

- (i) Thông tin về thị trường phải được phản ánh đầy đủ vào giá của sản phẩm tài chính.
- (ii) Mọi nhà đầu tư trong thị trường đều có khả năng tiếp cận thông tin về thị trường ngang nhau; không ai có thể nắm được thêm thông tin vượt trội về thị trường so với những người khác.

6. *Phương pháp mac-tin-gan* là một phương pháp quan trọng trong toán tài chính:

- Nhờ phương pháp này, người ta có thể dùng hệ số tính lùi (discounted coefficient) để xác định được vốn đầu tư ban đầu cần bỏ ra, để đạt được giá trị đáo hạn đã xác định trước của hợp đồng. Trong quá trình tính toán này, người ta tìm ra một độ đo xác suất mới mà giá của sản phẩm tài chính (vốn là ngẫu nhiên) lại được biểu diễn qua một kỳ vọng toán theo xác suất mới ấy, nghĩa là theo xác suất mới này thì giá trị sản phẩm là một số tất định. Vì thế độ đo xác suất này được gọi là xác suất trung tính đối với sự ngẫu nhiên, hay là xác suất rủi ro trung tính, hay là độ đo mac-tin-gan.

- Cũng nhờ phương pháp mac-tin-gan, các sản phẩm tài chính trong thị trường hiệu quả có thể biểu diễn như các mac-tin-gan và do

đó có thể sử dụng phương pháp này để tính các đại lượng liên quan.

7. *Nhiều phương pháp thống kê* như phân tích phân loại, thống kê quá trình Markov, thống kê phi tham số, thống kê Bayes, ... cũng đã được sử dụng trong Toán tài chính. Đặc biệt thống kê phân tích phân biệt đã được dùng để xây dựng các chỉ số tín nhiệm công ty, chẳng hạn chỉ số Z của Altman cho biết vùng an toàn, vùng nguy hiểm hoặc phá sản của một doanh nghiệp; hoặc các chỉ số tín nhiệm khách hàng dựa trên đánh giá khả năng trả nợ của các khách hàng vay tiền của ngân hàng. Phương pháp xích Markov được dùng để theo dõi diễn biến khả năng tài chính của các doanh nghiệp ...

8. *Hai định lý cơ bản của Toán tài chính.* Cơ sở của lý thuyết hiện đại về Toán học Tài chính là hai điều khẳng định cơ bản sau đây:

Định lý 1: *Một thị trường không có độ chênh thị giá khi và chỉ khi tồn tại một độ đo xác suất rủi ro trung tính.*

Định lý 2: *Một thị trường là đầy đủ nếu tồn tại duy nhất một độ đo xác suất rủi ro trung tính.*

IV. Kết luận. Toán học tài chính luôn luôn được phát triển để đáp ứng với nhu cầu thay đổi của thị trường tài chính. Việc vận dụng luôn luôn cần sự linh hoạt và điều chỉnh, không cứng nhắc (tiếng Anh là calibration). Tuy là một khoa học nhưng toán tài chính luôn ở trạng thái động, các phương pháp luôn thay đổi linh hoạt theo thời gian và hoàn cảnh áp dụng. Trong một lần đi công tác ở Mỹ, tôi được một giáo sư toán tài chính Mỹ hỏi rằng: “Anh đã đọc Binh pháp của Tôn Tử chưa?” Tôi ngạc nhiên và trả lời rằng tôi chưa đọc, mặc dù có biết qua, nhưng không hiểu có liên quan gì đến thị trường chứng khoán. Tôn Tử, tức Tôn Vũ, là một thiên tài quân sự Trung quốc ở thế kỷ thứ 6 trước Công nguyên. Về sau khi có dịp đọc cuốn sách của tác giả Dean Lundell nhan đề là “Binh pháp Tôn Tử, Kim chỉ nam trong giao dịch thị trường

chứng khoán” tôi mới hiểu rằng, người Mỹ khôn ngoan và thực dụng, đã biết vận dụng trí tuệ và văn minh Trung hoa hơn 2500 trước vào việc kinh doanh chứng khoán: mười ba phép binh của Tôn Tử cũng ứng với mười ba phép ứng xử của nhà đầu tư trong thị trường chứng khoán; ngoài ra Tôn Tử đã từng nói:

“ Binh pháp có năm việc: một là quan sát, hai là dự đoán, ba là tính toán, bốn là so sánh, năm là chiến thắng”. Và đó cũng là năm công đoạn của Toán học tài chính, trong đó công đoạn cuối cùng được hiểu là xây dựng một lý thuyết thay đổi phù hợp một cách tối ưu với diễn biến của thị trường tài chính.

Tài liệu tham khảo

- [1] Nguyễn Văn Hữu, Các phương pháp toán học trong tài chính, Nhà xuất bản Đại học quốc gia Hà nội, 2007.
- [2] Trần Trọng Nguyên, Cơ sở Toán tài chính, Nhà xuất bản Khoa học và kỹ thuật, Hà nội, 2009.
- [3] Glenn Shafer & Vladimir Vovk, Probability and Finance: It's Only A Game. Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley and Sons, 2001.
- [4] Trần Hùng Thao, Toán học Tài chính, Nhà XB Khoa học và Kỹ thuật, Hà nội, 2004.